1. INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

1.1 Historia de la Geometría

Las matemáticas son tan antiguas como la propia humanidad en los diseños prehistóricos de cerámica, tejidos y en las pinturas rupestres se pueden encontrar evidencias del sentido geométrico y del interés en figuras geométricas.

Las matemáticas son una de las ciencias más antiguas, y más útiles. El concepto de matemáticas, se comenzó a formar, desde que el hombre vio la necesidad de contar objetos, esta necesidad lo llevó a la creación de sistemas de numeración que inicialmente se componían con la utilización de los dedos, piernas, o piedras. Los sistemas de cálculo primitivos estaban basados, seguramente, en el uso de los dedos de una o dos manos, lo que resulta evidente por la gran abundancia de sistemas numéricos en los que las bases son los números 5 y 10.

La historia de las matemáticas o del cálculo comienza desde que el hombre ve la necesidad de contar. La palabra cálculo proviene del latín *calculus*, que significa contar con piedras.

Las matemáticas son el estudio de las relaciones entre cantidades, magnitudes y propiedades, y de las operaciones lógicas utilizadas para deducir cantidades, magnitudes y propiedades desconocidas. En el pasado las matemáticas eran consideradas como la ciencia de la cantidad, referida a las magnitudes (como en la geometría), a los números (como en la aritmética), o a la generalización de ambos (como en el álgebra). Hacia mediados del siglo XIX las matemáticas se empezaron a considerar como la ciencia de las relaciones, o como la ciencia que produce condiciones necesarias. Esta última noción abarca la lógica matemática o simbólica, ciencia que consiste en utilizar símbolos para generar una teoría exacta de deducción e inferencia lógica basada en definiciones, axiomas, postulados y reglas que transforman elementos primitivos en relaciones y teoremas más complejos.

La historia del origen de la Geometría es muy similar a la de la Aritmética, siendo sus conceptos más antiguos consecuencia de las actividades prácticas. Los primeros hombres llegaron a formas geométricas a partir de la observación de la naturaleza.

No solo el origen de los conocimientos geométricos, sino diversos aspectos, como la necesidad de comparar las áreas y volúmenes de figuras simples, la construcción de canales y edificios, las figuras decorativas, los movimientos de los astros, contribuyeron al nacimiento de las reglas y propiedades geométricas que se encuentran en los documentos de las antiguas civilizaciones egipcia y mesopotámica.

Los asirios y babilonios

La rueda inventada por los sumerios 3500 años A.C., marca en la historia el inicio de la civilización; inventaron la escritura, crearon la aritmética y las construcciones de sus ciudades revelan la aceptación de las figuras geométricas. En la antigua Mesopotamia florece la cultura de los babilonios, herederos de los sumerios.

Tenían el conocimiento de cómo calcular el área de algunas figuras geométricas como el rectángulo, el triángulo y el trapecio; así como el volumen de algunos prismas rectos y pirámides de base cuadrada. Es probable que descubrieran las propiedades de la circunferencia, ya que asignaron a π un valor de 3, estableciendo la relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo.

Los egipcios

Una antigua opinión transmitida por Herodoto, historiador griego (484-420 A.C), atribuyó a los egipcios el descubrimiento de la Geometría, ya que, según él, necesitaban medir constantemente sus tierras debido a que las inundaciones del río Nilo borraban continuamente sus extensiones. La aplicación de sus conocimientos geométricos se hicieron sobre la medida de la tierra, de lo cual se deduce el significado etimológico de Geometría, cuyas raíces griegas son: *GEO* (tierra) y *METRON* (medida).

Los egipcios aplicaron sus conocimientos de geometría en la construcción de pirámides como la de KEOPS, KEFREN y MEKERINOS, que son cuadrangulares y sus caras laterales son triángulos equiláteros, la de KEOPS es una de las siete maravillas del mundo donde se ha comprobado que además de la precisión en sus dimensiones está perfectamente orientada.

Los conocimientos de los egipcios están contenidos en cinco papiros, siendo el de mayor interés el de RHIND donde se establecen las reglas para calcular el área del triángulo isósceles, área del trapecio isósceles y el área del círculo. Determinaron el valor de 3.1604 como relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo, valor mucho más aproximado que el de los babilonios para π.

Los griegos

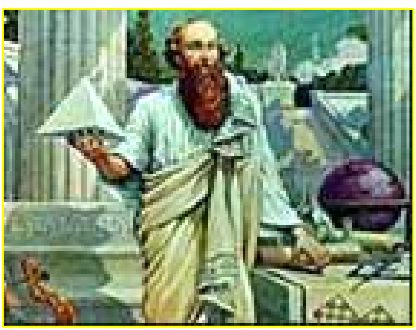
Los conocimientos egipcios sobre la geometría eran netamente empíricos, ya que no se cimentaban en una sistematización lógica deducida a partir de axiomas y postulados.

El pensamiento racional de los griegos condujo a los primeros matemáticos a buscar no sólo el "cómo", sino además el "porqué" de los fenómenos y de la realidad que los rodeaba. Para ellos las matemáticas tenían un objetivo principal; entender el lugar que ocupa el ser humano en el Universo, de acuerdo a un esquema racional.

En Grecia comienza la geometría como ciencia deductiva, con los matemáticos, Tales de Mileto, Herodoto, Pitágoras de Samos y Euclides de Alejandría; quienes fueron a Egipto a iniciarse en los conocimientos de la geometría.

Tales de Mileto (siglo VII A.C.) fue uno de los sabios, fundador de la escuela "Jónica", se inicia en la filosofía y las ciencias, especialmente en la geometría.

Resolvió algunas dudas como la altura de las pirámides, la igualdad de los ángulos de la base en el triángulo isósceles, que el valor del ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto, y demostró algunos teoremas relativos a la proporcionalidad de segmentos determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelas.



Pitágoras de Samos (siglo VI A.C.) fue discípulo de Tales de Mileto, fundó la escuela pitagórica, atribuyéndose el teorema que lleva su nombre y que se enuncia: "*El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos*". Otro de sus teoremas expresa: "*La suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es igual a dos rectos*".

Euclides de Alejandría (siglo IV A.C.) uno de los más distinguidos maestros de la escuela de Alejandría y quién por encargo de Ptolomeo Rey de Egipto, reunió y ordenó los teoremas y demás proporciones geométricas en una obra llamada "Elementos" constituida por 13 libros, por lo cual se le considera el padre de la geometría.

1.2 Definición de Geometría

En su forma más elemental, la geometría se aplica a la resolución de problemas métricos, como calcular las áreas y perímetros de figuras planas, así como superficies y volúmenes de cuerpos sólidos. Es decir, estudia las propiedades de las formas y de los cuerpos geométricos.

Para su estudio, la geometría se divide en:

Geometría plana	Estudia las propiedades de las superficies y figuras planas como los triángulos, las rectas, los polígonos, los cuadriláteros y la circunferencia. Esta geometría también recibe el nombre de geometría euclidiana, en honor del matemático griego Euclides.
Geometría del espacio	Estudia los cuerpos geométricos cuyos puntos no están en el mismo plano, es decir, las figuras de tres dimensiones.

Existen otras geometrías especializadas en diferentes campos de las matemáticas, como son:

Geometría analítica	Estudia las figuras geométricas utilizando un sistema de coordenada, y los problemas geométricos por métodos algebraicos, que se representan por grupos numéricos y las figuras por ecuaciones.
Geometría descriptiva	Estudia los cuerpos en el espacio por medio de sus proyecciones sobre determinados planos.

EJERCICIO 1-1

INSTRUCCIONES.- Contesta cada una de las siguientes preguntas.

1.- Civilización que ordenó los conocimientos empíricos de la geometría para elevarla a ciencia:

____

2.- Civilización que descubrió las propiedades de la circunferencia:

____

3.- Civilización a la que se le atribuye el descubrimiento de la Geometría:

____

4.- Sabio fundador de la escuela "Jónica":

____

5.- Maestro de la escuela de Alejandría, su máxima obra se titula "Elementos" y se le considera el padre de la geometría:

____

6.- ¿Qué significa la palabra Geometría?

____

7.- Define Geometría plana:

____

8- Define Geometría analítica:

____

9.- ¿Qué necesidades de la vida cotidiana dieron origen a la Geometría?

____

10.- Nombre de los matemáticos griegos que inician la geometría como ciencia deductiva:

____

11.- Enuncia el teorema más importante de Pitágoras de Samos:

____

12.- ¿Qué conocimientos geométricos están contenidos en el papiro de RHIND?

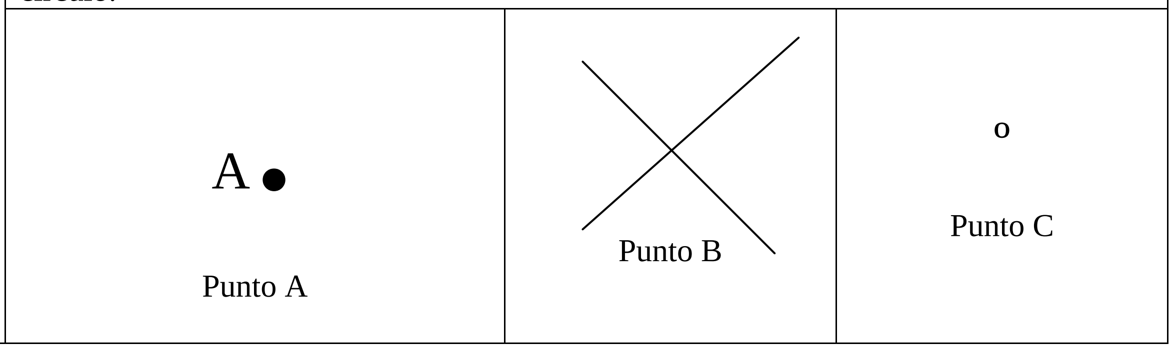
____

1.3 Conceptos básicos de la Geometría Euclidiana

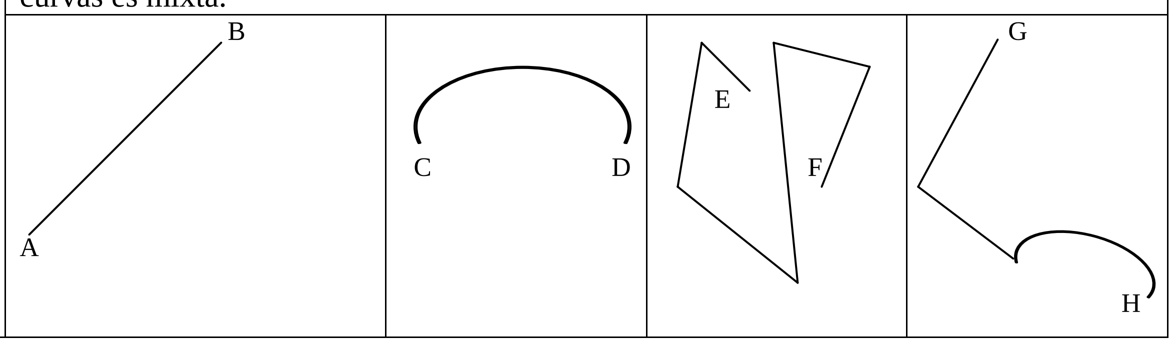
1.3.1 Conceptos no definidos

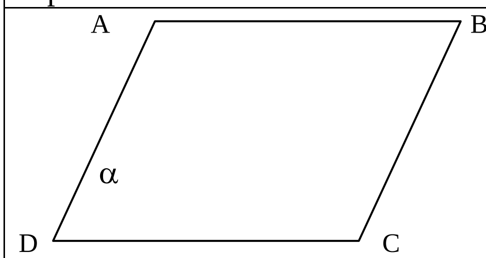
La estructura deductiva de la geometría parte de tres conceptos básicos no definidos que son el *punto*, la *línea* y el *plano*. Son conceptos fundamentales no definidos o primitivos, puesto que no hay palabras más sencillas para definirlos. Sin embargo, se pueden describir intuitivamente para comprenderlos y darles un significado.

PUNTO	Concepto geométrico no definido que carece de longitud, anchura y espesor. Euclides hizo la definición de un punto como lo que tiene posición pero no tiene dimensión. La idea de punto está sugerida por la huella que deja un lápiz en el papel. Los puntos se representan o designan por letras mayúsculas, por un trazo, una cruz o un pequeño círculo.



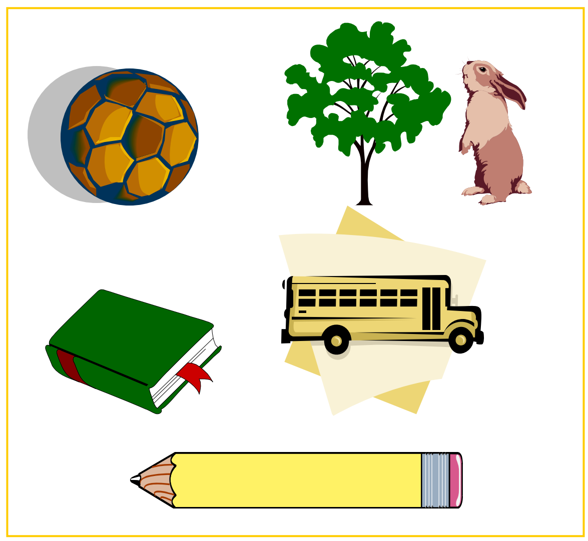
LÍNEA	Concepto geométrico no definido que posee longitud pero carece de anchura y espesor. Las líneas pueden ser rectas, curvas o combinaciones de éstas. La recta es una línea que tiene todos sus puntos en una misma dirección. Cuando los puntos no siguen una misma dirección la línea es curva. La línea formada por rectas que no siguen la misma dirección es quebrada. La formada con rectas y curvas es mixta.



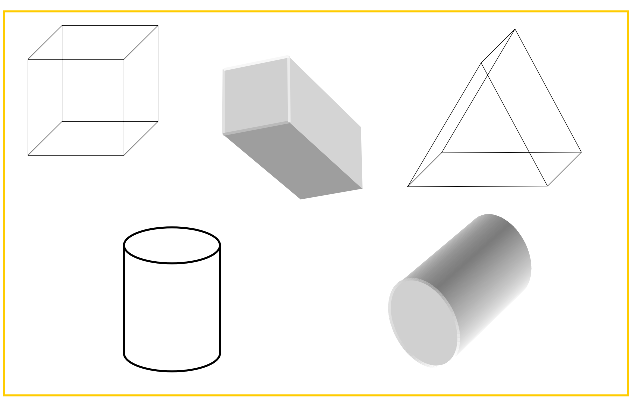
PLANO	Concepto geométrico no definido. Una superficie como la de una pared o la de un piso, etc., nos sugiere la idea de un plano. Se suele representar por un paralelogramo y se nombra por tres de sus puntos no alineados o por una letra griega. La Geometría plana estudia las figuras planas, es decir, las que pueden dibujarse sobre una superficie plana. Una superficie es el límite que separa a los cuerpos del espacio que los rodea. Las superficies sólo tienen dos dimensiones, largo y ancho.	
		Plano ABC Plano α

1.3.2 Cuerpo Físico y Cuerpo Geométrico.

Son *cuerpos físicos* las cosas que nos rodean como: cuadernos, sillas, bolígrafos, escuadras, mesas, libros, árboles, animales, etc.



De estos cuerpos físicos la geometría considera solamente su forma y dimensiones, llamándolos *cuerpos geométricos* o sólidos, estos tienen tres dimensiones: longitud, ancho y altura. Por ejemplo: los conos, los cubos, las esferas, los prismas, los cilindros, etc.



Los tres elementos principales con los que trabaja la geometría son: *línea* (largo), *superficie* (largo y ancho) y *volumen* (largo, ancho y altura).

1.4 Proceso inductivo y deductivo

Razonamiento es la capacidad que posee el hombre de asociar en forma debida, diversas ideas, observaciones o hechos, para obtener conclusiones correctas. Todo proceso de pensar surge de algunos datos (hipótesis). A su vez, estos datos, mediante una correcta asociación de ideas, observaciones o hechos (razonamiento), conducen a establecer una nueva proposición (conclusión).

1.4.1 Razonamiento inductivo

Este método se utiliza principalmente en el campo de la biología, física y química, que son ciencias experimentales y por lo tanto se basan en reglas y leyes generales obtenidas de las observaciones particulares concluyendo en situaciones generales.

1.4.2 Razonamiento deductivo

El universo de la geometría está constituido por un conjunto de proposiciones. Es el más usado en la ciencia y principalmente en la geometría. Se basa en ir encadenando conocimientos que se suponen verdaderos (axiomas y postulados) de manera tal, que se obtienen nuevos conocimientos (teoremas). También se le llama método analítico o indirecto cuya característica es que va de lo general a lo particular.

En este método es necesario establecer los siguientes conceptos:

Proposición: Enunciado que puede calificarse como falso o verdadero.

Axioma: Proposición que se admite como cierta sin necesidad de demostrarse.

Postulado: Proposición no tan evidente como un axioma, pero que también se admite sin demostración.

Teorema: Proposición que necesita ser demostrada.

Algunos enunciados se establecen como axiomas, postulados o teoremas y se describen en las siguientes cuadros.

Axiomas
• La parte es menor que el todo. • Si a cantidades iguales se les agrega una misma cantidad los resultados serán iguales. • El todo es mayor que cualquiera de las partes. • Si cantidades iguales se multiplican o dividen por cantidades iguales, los resultados serán iguales. • Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí. • Toda cantidad puede reemplazarse por su igual. • Si una cantidad es mayor que otra, y ésta mayor que una tercera, la primera es mayor que la tercera. • Todo número es igual a sí mismo. • La distancia más corta entre dos puntos es la longitud del segmento que los une.

Postulados
• Por dos puntos dados puede hacerse pasar una recta y sólo una. • Toda recta puede prolongarse en ambos sentidos. • Siempre es posible describir una circunferencia de centro y radio dados. • Toda figura se puede cambiar de posición sin alterar su forma ni sus dimensiones. • Hay infinitos puntos. • Todos los ángulos de lados colineales son iguales. • Por un punto exterior a una recta existe una perpendicular a ella. • El famoso postulado de Euclides: nombre que suele darse al postulado que fija la existencia de la paralela única a una recta por un punto exterior a ella.

Teoremas
• La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º. • Dos ángulos adyacentes son suplementarios. • Los ángulos opuestos por el vértice son iguales. • El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. • Si dos paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son iguales.

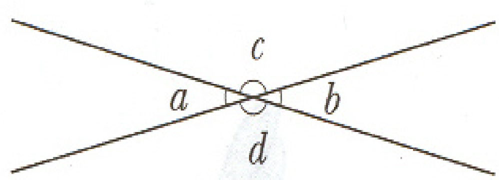
1.4.3 Proposiciones verdaderas

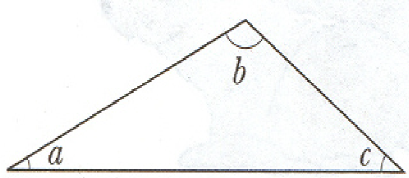
Toda proposición puede ser demostrada. La demostración consta de un conjunto de razonamientos que conducen a la evidencia de la verdad de la proposición.

En el enunciado de un ***teorema*** se distinguen dos partes:

- ***Hipótesis*.-** Contiene los planteamientos que son supuestos.
- ***Tesis*.-** Es la afirmación que se busca demostrar.

Para asegurar que las proposiciones son verdaderas se requiere una demostración compuesta por una cadena de razonamientos lógicos.

TEOREMA:	
	*Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.*
HIPÓTESIS	TESIS
a y b; c y d son ángulos opuestos por el vértice.	$\angle a = \angle b$ $\angle c = \angle d$

TEOREMA:	
	*Los ángulos interiores de un triángulo suman 180º.*
HIPÓTESIS	TESIS
a , b y c son ángulos interiores de un triángulo.	$\angle a + \angle b + \angle c = 180^{\circ}$

EJERCICIO 1-2

INSTRUCCIONES.- Contesta cada una de las siguientes preguntas.

1.- ¿Cuáles son los conceptos básicos no definidos en geometría, pero que pueden describirse en forma intuitiva?

____

2.- ¿Cuál es la característica de un cuerpo geométrico?

____

____

3.- ¿Qué es razonamiento?

____

____

4.- ¿Cómo se llama el método de razonamiento en el que se apoya la geometría?

____

____

5.- ¿En qué consiste el método de razonamiento deductivo?

____

____

6.- ¿Qué es un axioma?

____

____

7.- ¿Qué es una proposición?

____

____

8- ¿Qué es un teorema?

____

____

9.- Define las partes que constituyen un teorema.

____

____

10.- Menciona tres enunciados que describan un axioma, un postulado y un teorema.

____

____